

21090

B. Sc. (First Year) Examination, 2021

(New Course)

MATHEMATICS

Paper : Third

(Vector Analysis & Geometry)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 40

नोट : सभी खण्ड निर्देशानुसार हल करें।

Note: All section as directed.

खण्ड-‘अ’

Section-‘A’

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×3=15

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।

Note : Attempt all questions. Each question carries 3 marks.

1. सिद्ध कीजिए कि—

$$(a+b) \cdot [(b+c) \times (c+a)] = 2[abc]$$

Prove that :

$$(a+b) \cdot [(b+c) \times (c+a)] = 2[abc]$$

अथवा

Or

उस समान्तर षट्फलकी का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी संगामी कोरें क्रमशः सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ को निरूपित कीजिए।

Find the volume of parallelepiped whose edges are represented by $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$.

2. यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, अर्थात् $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ तो दर्शाइए कि $\text{grad } r^n = nr^{n-2} \vec{r}$ (or $\nabla r^n = nr^{n-2} \vec{r}$)

If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, that is $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ is then prove that $\text{grad } r^n = nr^{n-2} \vec{r}$ (or $\nabla r^n = nr^{n-2} \vec{r}$)

अथवा
Or

यदि $v = e^{yz} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$, तो $\text{curl } V$ ज्ञात कीजिए।

If $v = e^{yz} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$, then find $\text{curl } V$.

3. दिया गया है—

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= 2i - j + 2k \text{ जब } t = 2 \\ &= 4i - 2j + 3k \text{ जब } t = 3\end{aligned}$$

दर्शाइए कि—

$$\int_2^3 \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt = 10$$

Given that :

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= 2i - j + 2k \text{ where } t = 2 \\ &= 4i - 2j + 3k \text{ where } t = 3\end{aligned}$$

Show that :

$$\int_2^3 \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt = 10$$

अथवा
Or

यदि—

$$\vec{r}(t) = 5t^2i + tj - t^3k$$

दर्शाइए कि—

$$\int_1^2 \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} dt = -14i + 75j - 15k$$

If $\vec{r}(t) = 5t^2i + tj - t^3k$

Show that :

$$\int_1^2 \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} dt = -14i + 75j - 15k$$

4. यदि S कोई बद्ध पृष्ठ है, जो कि आयतन V को घेरता है और $F = xi + 2yj + 3zk$ तो सिद्ध कीजिए कि $\iint_S F \cdot \hat{n} ds = 6V$

If S is any closed surface enclosing a volume V and $F = xi + 2yj + 3zk$ then prove that $\iint_S F \cdot \hat{n} ds = 6V$.

अथवा

Or

फलन $F = (x^2 + y^2) i - 2xy j$ के लिए स्टॉक की प्रमेय को सिद्ध कीजिए जबकि समाकलन को $x = \pm a, y = 0, y = b$ से उस आयत के परितः लिया जाए।

Verify Stoke's theorem for $F = (x^2 + y^2) i - 2xy j$ taken round the rectangle bounded by $x = \pm a, y = 0, y = b$.

5. शांकव का व्यापक समीकरण समझाइए एवं इसके विशेष प्रकार लिखिए।

Explain General Equation of the conic and also write its particular form.

अथवा

Or

शांकव का अनुरेखण कीजिए तथा इसका केन्द्र ज्ञात कीजिए—

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$$

Trace the conic $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$, also find its centre.

खण्ड-'ब'

Section-'B'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

5×5=25

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। अत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

Note: Attempt all five questions. Each question carries 5 marks.

6. अतिपरवलय परवलयज की परिभाषा उदाहरण सहित समझाइए।

Explain hyperbolic paraboloid with examples.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि संनाभि शांकव एक दूसरे को लम्बवत काटते हैं।

Prove that confocal conics cut at right angles.

7. उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(0, 0, 3)$ और आधार वक्र वृत्त $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ है।

Find the equation of the cone whose vertex is $(0, 0, 3)$ and base is the circle $x^2 + y^2 = 4, z = 0$.

अथवा

Or

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष मूल बिन्दु है तथा जो वक्र $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, $lx + my + nz = p$ से गुजरता है।

Find the equation to a cone whose vertex is origin and which passes through the curve

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, lx + my + nz = p$$

8. सिद्ध कीजिए कि एक लम्बवृत्तीय शंकु जिसका शीर्ष मूल बिन्दु है, अक्ष OZ है तथा अर्द्ध-शीर्ष कोण α है, $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$ होगा।

Show that the equation to a right circular cone whose vertex is the origin, axis OZ and semi-vertical angle α is, $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$.

अथवा

Or

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(1, 2, 3)$ और आधार वक्र $y^2 = 4ax$, $z = 0$ है।

Find the equation to a cone whose vertex is $(1, 2, 3)$ and base is $y^2 = 4ax$, $z = 0$.

9. अतिपरवलयज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ के बिन्दु $(a \cos \alpha, b \sin \alpha, 0)$ से होकर जाने वाले जनक रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equations to the generators of the hyperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ which pass through the point $(a \cos \alpha, b \sin \alpha, 0)$.

अथवा

Or

शांकवज $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xz = 4$ के वास्तविक वृत्तीय परिच्छेदों को ज्ञात कीजिए।

Find the real circular sections of the conicoid $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xz = 4$.

10. सिद्ध कीजिए कि समतल, $x + 2y - 2z = 4$ परवलयज $3x^2 + 4y^2 = 24z$ को स्पर्श करता है। स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Show that the plane $x + 2y - 2z = 4$ touches the paraboloid $3x^2 + 4y^2 = 24z$. Find the point of contact.

अथवा

Or

सरल रेखा $7x + 10y = 30$, $5y - 3z = 0$ से होकर जाने वाले दीर्घवृत्तज $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ के स्पर्श तलों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of tangent planes to the ellipsoid $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ which pass through the line $7x + 10y = 30$, $5y - 3z = 0$.